Chapitre 5

Les nombres complexes - géométrie

I. Représentation géométrique

1) Le plan complexe

Définitions :

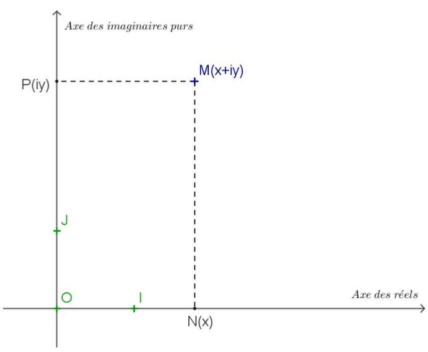
- Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
- À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y nombres réels, on associe le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

  On dit que M est le **point image** de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.
- Tout point $M(x\ ;\ y)$ est le point image d'un seul nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

  On dit que z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Notation et vocabulaire :

- Pour indiquer que $z = x + \mathrm{i}y$ (avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est l'affixe d'un point M, on note M(z).
- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi **axe des réels**.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi **axe des imaginaires purs**.

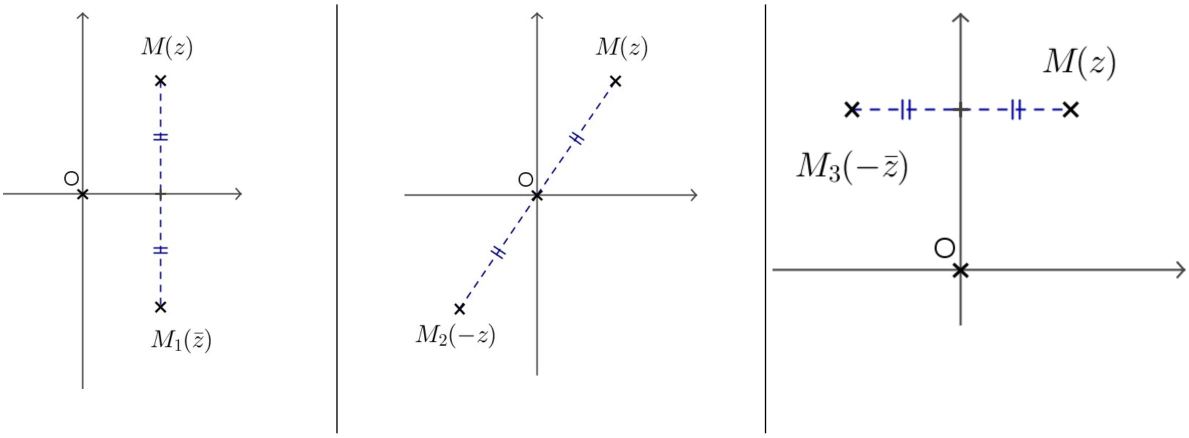


Exemples :

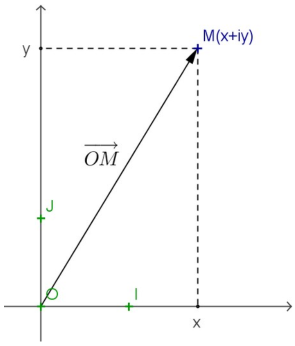
O, I et J ont pour affixes $z_0 = 0$, $z_I = 1$ et $z_J = \mathrm{i}$.

Remarques :

- « M appartient à l'axe des abscisses » équivaut à « Im(z) = 0 ».
- « M appartient à l'axe des ordonnées » équivaut à « Re(z) = 0 ».
- Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.
- Les points d'affixes z et $-z$ sont symétriques par rapport à l'origine.



2) Affixe d'un vecteur



Dans le plan complexe, $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y), donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe x + iy.

On dit que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a pour **affixe** $z_{\vec{u}}$ = x + iy.

Exemple :

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour affixe -1 + i notée $z_{\overrightarrow{IJ}}$.

Propriétés :

- Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs affixes sont égales.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes z et z', alors l'affixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est $z + z'$ et celle du vecteur $\lambda \vec{u}$ (λ nombre réel) est λz.

Propriétés :

Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I du segment [AB] est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstrations :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, l'affixe de $\overrightarrow{OB}$ est z_B et l'affixe de $\overrightarrow{OA}$ est z_A .
  Donc $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A .
- I est le milieu du segment [AB], donc $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ soit $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
  Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{OI}$, donc $z_A+z_B=2z_I$.

<u>**Exemple :**</u>

$A(1+\mathrm{i})$ et $B(-2+3\mathrm{i})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-2+3\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})=-3+2\mathrm{i}$.

Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_I=\dfrac{1+\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}+2\mathrm{i}$.

3) Module et arguments d'un nombre complexe

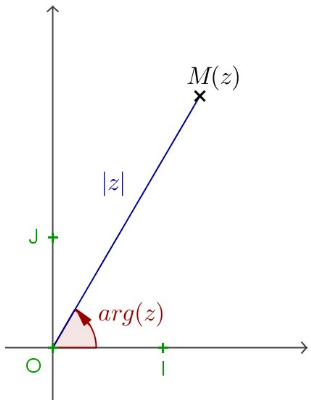
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

<u>**Définition :**</u>

Soit z un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.

- Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance OM : $|z| = OM$.
- Si z est non nul, on appelle **argument** de z, noté $arg(z)$, toute mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$:

  $arg(z)\equiv(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})[2\pi]$



<u>**Exemples :**</u>

- $|\mathrm{i}| = 1$ et $arg(\mathrm{i})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
- $|-3| = 1$ et $arg(-3)\equiv\pi[2\pi]$.
- $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et $arg(1+\mathrm{i})\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

<u>**Remarques :**</u>

- 0 n'a pas d'argument.
- Le module d'un réel est égal à sa valeur absolue.
- Si $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, alors $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Si les points A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B , alors $AB=|z_B-z_A|$.

Propriétés :

- Pour tout nombre complexe *z*, $z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.
- Pour tout nombre complexe *z*, $|-z|=|\bar{z}|=|z|$.
- Pour tout nombre complexe **non nul** *z* :

  $arg(-z)\equiv arg(z)+\pi[2\pi]$; $arg(\bar{z})\equiv -arg(z)[2\pi]$
- *z* est un réel si, et seulement si, $arg(z)\equiv 0[\pi]$
- *z* est un imaginaire pur si, et seulement si, $arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.

II. Forme trigonométrique

1) Définition

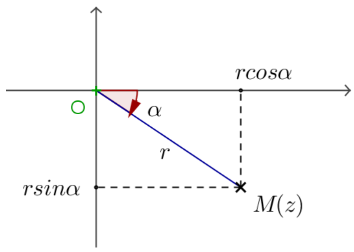
Définition :

Soit *z* un nombre complexe non nul, on pose :

x = Re(*z*) et *y* = Im(*z*) $y=\mathrm{Im}(z)$; *r* = |*z*| et $\alpha\equiv arg(z)[2\pi]$

On a alors *x* = *r* cos(*α*) et *y* = *r* sin(*α*).

On obtient alors l'écriture *z* = *r* (cos *α* + *i* sin *α*) qui est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe *z*.



Remarque :

Si le nombre complexe, non nul, *z* s'écrit *x* + i*y* sous forme algébrique et *r* (cos *α* + *i* sin *α*) sous forme trigonométrique, alors :

- *x* = *r* cos(*α*) et *y* = *r* sin(*α*)
- $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exemples :

- Soit $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$. On a $|z|=\sqrt{3+1}=2$. Alors $z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$ donc la forme trigonométrique de *z* est $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Un argument de *z* est $\frac{\pi}{6}$.
- $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ n'est pas la forme trigonométrique de *z* car -3 est négatif.

2) Opérations sur les formes trigonométriques

Propriété :

Les complexes $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$ avec $r > 0$ et $r' > 0$ sont égaux si, et seulement si, $\begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Démonstration :

Supposons que z et z' soient égaux et non nuls alors $OM = OM'$ et $(\vec{OI}\,;\vec{OM}) \equiv (\vec{OI}\,;\vec{OM'})[2\pi]$.

La réciproque est évidente.

Propriétés :

Si $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ et $z' = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$, alors on a :

- $zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$ lorsque $z \neq 0$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha'))$ lorsque $z' \neq 0$.

Démonstrations :

- $zz' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$
- $zz' = rr'(\cos \alpha \cos \alpha' + i \cos \alpha \sin \alpha' + i \sin \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha')$.

  Comme $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, on obtient :

  $zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$

  Comme $r > 0$ et $r' > 0$, on a $rr' > 0$ donc $rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$ est la forme trigonométrique de zz'.

  D'où $\begin{cases} |zz'| = rr' = |z| \times |z'| \\ arg(zz') \equiv \alpha + \alpha' \equiv arg\, z + arg\, z' [2\pi] \end{cases}$.

- Pour $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{r(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$.

  Comme $\frac{1}{r} > 0$, on a $\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \\ arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\alpha' \equiv -arg\, z [2\pi] \end{cases}$.

Conséquences :

Quels que soient les nombres z et z' non nuls, $n \in \mathbb{N}$ on a :

Opération	Produit	Puissance
Module	$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$; $n \in \mathbb{N}$
Argument	$arg(z \times z') \equiv arg\, z + arg\, z' [2\pi]$	$arg(z^n) \equiv n\, arg(z) [2\pi]$

Opération	Inverse	Quotient
Module	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$; $z \neq 0$	$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$; $z' \neq 0$
Argument	$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg\, z [2\pi]$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg\, z - arg\, z' [2\pi]$

Propriété (inégalité triangulaire) :

Quels que soient les nombres z et z' non nuls, on a :

$$\lvert z + z' \rvert \leqslant \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$$

Propriétés :

- $\lvert z_B - z_A \rvert = AB$ et $arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{AB})$
- $\left\lvert \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right\rvert = \frac{CB}{CA}$ et $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}\,; \overrightarrow{CB})$

Démonstrations :

- Il existe un unique point M dans le plan complexe tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

  Donc $z_M = z_B - z_A$ en notant z_M l'affixe du point M.

  Par suite $\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_M \rvert = OM = AB$ et $arg(z_B - z_A) = arg(z_M) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{AB})$.

$$\left\lvert \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right\rvert = \frac{CB}{CA}$$

et

$$arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = arg(z_B - z_C) - arg(z_A - z_C) = (\vec{u}\,; \overrightarrow{CB}) - (\vec{u}\,; \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}\,; \vec{u}) + (\vec{u}\,; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}\,; \overrightarrow{CB})$$

Conséquences :

- Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv 0 [\pi]$.
- Les droites (BC) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, $arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
- Caractérisation du cercle Γ de centre $\Omega(w)$ et de rayon R :

$$M(z) \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow |z - w| = R$$

- Caractérisation de la médiatrice Δ de $[AB]$:

$$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$$

III. Forme exponentielle

1) *La fonction* $\theta \mapsto \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

$$f : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$\theta \mapsto \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

- Pour tous nombres réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$.

  En effet,

  $f(\theta + \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$

  $= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta)$

  et

  $f(\theta) f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$

  $= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta)$

  Donc $f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$ et la fonction vérifie une relation fonctionnelle analogue à celle de la fonction exponentielle.

- Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

  On admet qu'alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i \sin'(\theta)$

  Ainsi, pour tout nombre réel θ, $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$ et donc

  $f'(\theta) = i(i \sin(\theta) + \cos(\theta)) = i f(\theta)$.

  Cette propriété est à rapprocher du fait que si $g(x) = e^{kx}$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $g'(x) = kg(x)$

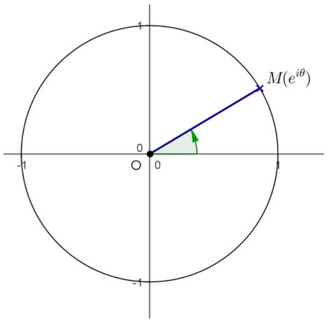
Définition :

Pour tout nombre réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Ainsi, $e^{i\theta}$ est **le** nombre complexe de **module 1** dont un **argument** est $\boldsymbol{\theta}$.

En d'autres termes, le cercle trigonométrique de centre l'origine O du repère est l'ensemble des points d'affixes $e^{i\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$.

Exemples :



- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Racines n-ièmes de l'unité

Définition :

On appelle **cercle unité**, et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On a donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Propriété :

Si z et z' sont deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$, alors :

$$z \times z' \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$$

Démonstrations :

- $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. Donc $z \times z' \in \mathbb{U}$
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z| = 1$, donc $z \neq 0$. De plus $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle r**acine *n*-ième de l'unité**, un nombre z tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Propriété :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; (n-1)\} \right\}$$

Démonstration :

$z^n = 1$. Donc $|z^n| = 1$ et $|z|^n = 1$. Et, comme $z \in \mathbb{R}^*$, alors $|z| = 1$. Posons donc $z = e^{i\theta}$.

$z^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = e^0 \Leftrightarrow n\theta \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$.

Or $z^n = 1$ est une équation polynomiale de degré n. Donc elle admet, au plus, n solutions.

Donc $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; (n-1)\} \right\}$

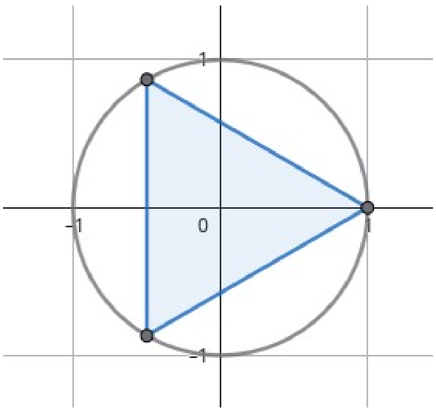
Exemples :

- $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 ; e^{\frac{2i\pi}{3}} ; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$
- $\mathbb{U}_4 = \left\{ 1 ; e^{\frac{2i\pi}{4}} ; e^{\frac{4i\pi}{4}} ; e^{\frac{6i\pi}{4}} \right\}$, donc $\mathbb{U}_4 = \{1 ; i ; -1 ; -i\}$

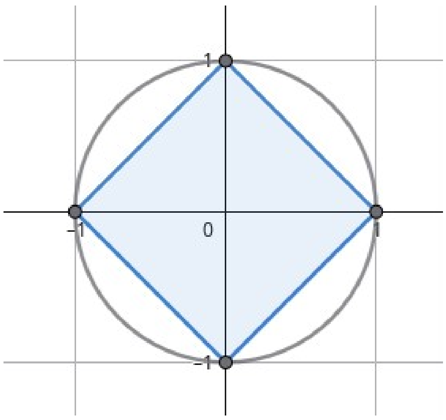
Remarque :

Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

$n = 3$



$n = 4$



3) *Formes exponentielles*

Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet une forme trigonométrique $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.

On peut donc écrire $z=|z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Définition :

Une forme exponentielle d'un nombre complexe $z \neq 0$ dont un argument est θ, est l'écriture $z=|z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Propriétés :

Pour tous nombres réels θ et θ', pour tout nombre entier naturel n,

- $|\mathrm{e}^{i\theta}|=1$ et $arg(\mathrm{e}^{i\theta})\equiv\theta[2\pi]$
- $\mathrm{e}^{i\theta}\times\mathrm{e}^{i\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- $(\mathrm{e}^{i\theta})^n=\mathrm{e}^{in\theta}$ (formule de Moivre)
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{-i\theta}=\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}}=\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$
- $\mathrm{e}^{i\theta}=\mathrm{e}^{i\theta'}$ si, et seulement si, $\theta \equiv \theta'$ [2π]

Exemple :

Le nombre $z=-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas écrit sous forme exponentielle.

Pour l'écrire sous forme exponentielle, on peut utiliser le fait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1$.

Alors $z=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

Propriétés :

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n :

- Formule de Moivre : $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.
- Formule d'Euler : $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2\mathrm{i}}$.

Démonstrations :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{cases}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=1\\ \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$ alors $\begin{cases}|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{\mathrm{n}}|=|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^{\mathrm{n}}=1\\ \arg((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{\mathrm{n}})\equiv\mathrm{n}\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\equiv\mathrm{n}\,\theta[2\pi]\end{cases}$

  On peut écrire $(\mathrm{e}^{i\theta})^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$. Par suite, $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$, on pose $n' = -n$ alors $n' \in \mathbb{N}$. Comme $e^{in\theta} = e^{-in'\theta} = \frac{1}{e^{in'\theta}}$, on a :

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{e^{in'\theta}}\right| = \frac{1}{\left|e^{in'\theta}\right|} = 1 \\ \arg\left(\frac{1}{e^{in'\theta}}\right) \equiv -\arg\left(e^{in'\theta}\right) \equiv -n'\arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv -n'\theta \equiv n\theta[2\pi] \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

- Pour tout réel θ, on a $\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \end{cases}$,

  Par somme, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ soit $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

  Par différence, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$ soit $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

-

Conséquences

Formules d'addition :

Pour tous réels a et b, on a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Démonstration :

Comme $e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$, en passant à la forme algébrique, on obtient :

$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \cos(a + b) + i\sin(a + b)$, en développant :

$(\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = \cos(a + b) + i\sin(a + b)$.

Formule de duplication :

Pour tout réel a, on a :

- $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

Démonstration :

Comme $\left(e^{ia}\right)^2 = e^{2ia}$, en passant à la forme algébrique, on obtient :

$(\cos a + i \sin a)^2 = \cos(2a) + i \sin(2a)$, en développant :

$$\cos^2 a + 2i \sin a \cos a - \sin^2 a = \cos(2a) + i \sin(2a).$$